J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 11, No. 1, 71-76, Juli 2014
ISBN:1858-1382

IDEAL PRIMA DAN IDEAL MAKSIMAL PADA GELANGGANG POLINOMIAL

Qharnida Khariani, Amir Kamal Amir dan Nur Erawaty

Abstrak

Teori gelanggang merupakan salah satu bagian di matematika aljabar yang berkembang pesat saat ini. Dari suatu gelanggang R dapat dibentuk gelanggang baru R[x] yang disebut dengan gelanggang polinomial. Ideal adalah bagian dari gelanggang yang mempunyai struktur istimewa. Jika R gelanggang dan N himpunan bagian tidak kosong dari R, himpunan N dikatakan ideal dari R jika N memuat semua hasil kali xr dan rx dengan x sebarang anggota N dan r sebarang anggota R. Dalam tulisan ini lebih terkhusus lagi akan dibahas mengenai ideal prima dan ideal maksimal. Lebih jelasnya, akan dibahas karakterisasi ideal prima, karakterisasi ideal maksimal, keterkaitan antara kedua ideal tersebut dan keterkaitan antara ideal prima dan ideal maksimal dengan gelanggang faktornya.

Kata Kunci : gelanggang faktor, gelanggang polinomial, ideal, ideal maksimal, ideal prima.

1. Pendahuluan

Teori gelanggang merupakan salah satu bagian di matematika aljabar yang berkembang pesat saat ini. Gelanggang adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma tertentu. Sedangkan ideal adalah bagian dari gelanggang dengan struktur yang istimewa. Misalkan N adalah subset dari R,maka N dikatakan Ideal dari R jika N memuat semua hasil kali xr dan rx dengan x sebarang anggota dan r sebarang anggota .

Paper ini akan membahas mengenai ideal prima dan ideal maksimal. Lebih jelasnya akan dibahas mengenai karakterisasi ideal prima, karakterisasi ideal maksimal, keterkaitan antara kedua ideal tersebut, dan keterkaitan antara kedua ideal dengan gelanggang faktornya.

Untuk pembahasan yang lebih lanjut, dibutuhkan beberapa defenisi. Oleh itu, sebelum memasuki pembahasan mengenai hal tersebut di atas, pada bagian ini disajikan lebih dahulu defenisi-defenisi pendukung yang akan dipakai dalam pembahasan selanjutnya.[1]

Definisi 1.1 [1]
Misal R adalah suatu gelanggang dan N adalah sub gelanggang, maka N disebut ideal R jika untuk $\forall a \in N$ dan $\forall x \in R$ berlaku $xa \in N$ dan $ax \in N$.

Definisi 1.2 [1]
Sebuah ideal $N \neq R$ pada sebuah gelanggang komutatif R disebut ideal prima jika $ab \in N$ berimplikasi $a \in N$ atau $b \in N$, untuk $a, b \in R$.

Definisi 1.3 [2]

[1,2,3] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar

Sebuah ideal M pada gelanggang disebut ideal maksimal jika M berbeda dari R sedemikian sehingga tidak ada ideal sejati N pada R yang memuat M.

Teorema 1.1 [3]
Jika R adalah gelanggang komutatif sedemikian sehingga $R^2 = R$ (dalam hal ini R memiliki identitas), maka setiap ideal maksimal adalah prima.

Teorema 1.2 [4]
Jika F adalah lapangan, maka $F[x]$ adalah ideal utama.

2. Pembahasan

Masalah yang akan dibahas dalam bagian ini adalah mengenai hal-hal yang berhubungan dengan ideal prima dan ideal maksimal pada gelanggang polinomial.

Lebih jelasnya, dalam paper ini akan dipaparkan dengan terperinci permasalahan-permasalahan berikut:

1. Bagaimana karakterisasi ideal prima?
2. Bagaimana karakterisasi ideal maksimal?
3. Bagaimana keterkaitan antara ideal prima dan ideal maksimal dengan polinomial yang tak tereduksi?

Berikut ini adalah contoh dari “Gaussian Integer” yang bukan ideal prima.

Contoh 2.1
Misalkan $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ dan $I = (1+i)^2 R$. Maka akan ditunjukkan apakah I ideal prima atau tidak ideal prima pada R.

Bukti :
$R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$.

$$\begin{aligned} I &= (1+i)^2 R = (1+2i+i^2)R = (2i)R = 2i(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i) \\ &= 2\mathbb{Z}i + 2\mathbb{Z}i^2 \\ &= -2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}i\ . \end{aligned}$$

Ambil $a = a_1 + a_2 i \ \in R$ dan $b = b_1 + b_2 i \ \in R$.
Misalkan $ab \in I$, maka

$$\begin{aligned} ab &= (a_1 + a_2 i\,)(b_1 + b_2 i) \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + a_2 b_2 i^2 \\ &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i - a_2 b_2 \\ &= (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \end{aligned}$$

Karena $ab \ \in I$, artinya $(a_1 b_1 - a_2 b_2) \in 2\mathbb{Z}$ dan $(a_1 b_2 + a_2 b_1) \in 2\mathbb{Z}$.
Bukti penyangkal
Misalkan dipilih $a = 3 + 3i \ \notin I$ dan $b = 3 + 3i \notin I$, maka

$$\begin{aligned} ab &= (3+3i)(3+3i) \\ &= 9 + 9i + 9i + 9i^2 \\ &= 18i \in I. \end{aligned}$$

Karena $a \notin I$ dan $b \notin I$, tetapi $ab \in I$ maka berdasarkan definisi maka I bukan ideal prima.
Berikut ini adalah teorema mengenai ideal prima dengan polinomial yang tak tereduksi.

Teorema 2.1
Misalkan F adalah lapangan dan I adalah ideal terhadap gelanggang polinomial $F[x]$, maka I prima jika dan hanya jika $I = \langle 0 \rangle$ atau $I = \langle f(x) \rangle$ untuk suatu $f(x)$ yang tak tereduksi.

Bukti :
$\Rightarrow$ Jika I ideal prima, maka $I = \langle 0 \rangle$ dan $I = \langle f(x) \rangle$ dengan $f(x)$ yang tak tereduksi. Berdasarkan *Teorema 1.2* jika I ideal di $F[x]$ maka I adalah ideal utama. Misalkan $I = \langle f(x) \rangle$, jika $f(x) = 0$, maka bukti selesai. Dan jika $f(x) \neq 0$ akan ditunjukkan bahwa $f(x)$ tak tereduksi. Andaikan $f(x)$ tereduksi berarti terdapat $g(x)$ dan $h(x)$ dengan derajat $g(x) < f(x)$ dan derajat $h(x) < f(x)$. Sedemikian sehingga $f(x) = g(x)h(x)$. Karena derajat $g(x) < f(x)$ dan derajat $h(x) < f(x)$, maka $g(x) \notin \langle f(x) \rangle$ dan $h(x) \notin \langle f(x) \rangle$. Hal ini berarti I bukan ideal prima. Jadi, terjadi kontradiksi. Dengan demikian $f(x)$ tak tereduksi.

$\Leftarrow$ Jika $I = \langle 0 \rangle$ dan $I = \langle f(x) \rangle$ dengan $f(x)$ yang tak tereduksi maka I ideal prima.
Untuk $I = \langle 0 \rangle$, misalkan $g(x)h(x) \in \langle 0 \rangle$ maka $g(x)h(x) = 0$. Akibatnya $g(x) = 0$ atau $h(x) = 0$. Sehingga $g(x) \in \langle 0 \rangle$ atau $h(x) \in \langle 0 \rangle$. Dengan kata lain $I = \langle 0 \rangle$ prima.
Untuk $I = \langle f(x) \rangle$ dengan $f(x)$ yang tak tereduksi. Andaikan $\langle f(x) \rangle$ tidak prima, berarti terdapat $g(x)h(x) = f(x)$ dengan $g(x) \notin \langle f(x) \rangle$ dan $h(x) \notin \langle f(x) \rangle$. Karena derajat $g(x) < f(x)$ dan derajat $h(x) < f(x)$, maka $f(x)$ tak tereduksi. Jadi, terjadi kontradiksi. Dengan demikian $f(x)$ ideal prima.
Berikut ini diberikan contoh mengenai ideal maksimal.

Contoh 2.2
$M \neq R$ dan R gelanggang komutatif, maka M ideal maksimal jika dan hanya jika untuk setiap $r \in R - M$, terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $1_R - rx \in M$.

Bukti :
$\Longrightarrow$ Misalkan M ideal maksimal. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $r \in R - M$, terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $1 - rx \in M$. Andaikan terdapat $r \in R - M$ untuk setiap $x \in R$ sedemikian sehingga $1 - rx \notin M$. Jelas bahwa $rR + M$ adalah ideal di R. Karena $1 - rx \notin M$, maka $1 \notin rR + M$. Jadi $rR + M \subsetneq R$.
Lebih lanjut, karena $r \in rR + M$ dan $r \notin M$, maka $M \subsetneq rR + M$. Dengan demikian M bukan ideal maksimal.
Terjadi kontradiksi dengan pernyataan awal, sehingga terbukti bahwa M ideal maksimal jika untuk setiap $r \in R - M$, terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $1 - rx \in M$.

$\Leftarrow$ Misalkan untuk setiap $r \in R - M$, terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $1 - rx \in M$. Akan ditunjukkan bahwa M ideal maksimal. Misalkan N adalah sebuah ideal lain dengan $M \subsetneq N$. Misalkan $r \in N - M$, berarti terdapat $x \in R$, sehingga $1 - rx \in M \subseteq N$. Jadi, $1 - rx \in N$. Karena, $rx \in N$, maka $1 \in N$. Dan karena $1 \in N$, maka $N = R$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa M ideal maksimal.

Berikut adalah lemma mengenai gelanggang *formal power series* yang ideal maksimal.

Lemma 2.1
Misal $F[\![X]\!]$ adalah gelanggang dari *formal power series* dengan koefisiennya dalam lapangan F. Maka $\langle X \rangle$ adalah ideal maksimal.

Bukti :
$\langle X\rangle = \{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots | a_i \in F\,; i = 1,2,3 \cdots\}$.
Misalkan J adalah ideal dari $F[\![X]\!]$ dengan $\langle X\rangle \subsetneq J$. Akan ditunjukkan bahwa $J = F[\![X]\!]$. Karena $\langle X\rangle \subsetneq J$, maka ada $P(x) \in J$ tetapi $P(x) \notin \langle X\rangle$. Karena $P(x) \notin \langle X\rangle$ maka $P(x)$ berbentuk :
$P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots$ dengan $p_0 \neq 0$.
Karena $p_1x + p_2x^2 + \cdots \in \langle X\rangle$, maka $p_1x + p_2x^2 + \cdots \in J$. Oleh karena itu, karena J ideal berarti :
$P(x) - [p_1x + p_2x^2 + \cdots] \in J$
$= [p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots]$
$\quad -[p_1x + p_2x^2 + \cdots] \in J$
$= p_0 \in J$.
Karena $p_0 \in J$ dan $p_0 \in F$, maka terdapat ${p_0}^{-1} \in F$. Karena J ideal, maka :

$$ {p_0}^{-1}p_0 \in J $$

menghasilkan

$$ 1 \in J $$

Karena $1 \in J$ maka $J = F[\![X]\!]$.
Karena $J = F[\![X]\!]$ maka dapat disimpulkan bahwa $\langle X\rangle$ ideal maksimal.

Berikut ini adalah teorema mengenai ideal maksimal dengan polinomial yang tak tereduksi.

Teorema 2.2
Misalkan F adalah lapangan dan I adalah ideal terhadap gelanggang polinomial $F[x]$, maka $\langle f(x)\rangle \neq \langle 0\rangle$ ideal maksimal terhadap $F[x]$ jika dan hanya jika $f(x)$ tak tereduksi atas F.

Bukti :
$\Longrightarrow$ Misalkan$\langle f(x)\rangle \neq \langle 0\rangle$ adalah ideal maksimal terhadap $F[x]$. Maka $\langle f(x)\rangle \neq F[x]$ sehingga $f(x) \neq F$. Karena $\langle f(x)\rangle$ ideal maksimal maka $\langle f(x)\rangle$ juga ideal prima. Sehingga $f(x) = g(x)h(x)$ berimplikasi $g(x) \in f(x)$ atau $h(x) \in f(x)$. Karena $f(x) \neq \langle 0\rangle$ berarti $g(x)$ konstan atau $h(x)$ konstan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $f(x)$ tak tereduksi.

$\Longleftarrow$ Jika $f(x)$ tak tereduksi akan ditunjukkan bahwa $\langle f(x)\rangle \neq \langle 0\rangle$ ideal maksimal. Misal $M = \langle f(x)\rangle$. Untuk menunjukkan ideal maksimal dari $F[x]$ sedemikian sehingga $M \subseteq N$ maka $M = N$ atau $N = F[x]$. Karena F lapangan maka menurut teorema *Teorema 1.2* $F[x]$ adalah ideal utama, maka $N = \langle g(x)\rangle$ untuk suatu $g(x) \in F[x]$. Karena $f(x) \in M \subseteq N$ maka $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x) \in F[x]$. Karena $f(x)$ tak tereduksi maka $g(x)$ konstan atau $h(x)$ konstan. Jika $h(x)$ konstan maka $h(x) = a$, untuk suatu $a \in F$. Berarti $f(x) = g(x) \cdot a$ atau $g(x) = f(x) \cdot a^{-1}$. Berarti $g(x) \in M$, berakibat $N \subseteq M$. Karena $M \subseteq N$ dan $N \subseteq M$ maka $M = N$. Jika $g(x)$ konstan maka $g(x) = t$, untuk suatu $t \in F$. Sehingga $t \cdot t^{-1} = 1 \in N$. Oleh karena itu, untuk setiap $m(x) \in F[x]$ berlaku $1 \cdot m(x) = m(x) \in N$ (karena N ideal dari $F[x]$). Maka $N = F[x]$.
Sehingga dapat disimpulkan bahwa
$M = \langle f(x)\rangle$ ideal maksimal dari $F[x]$.

Seperti yang diketahui bahwa terdapat teorema yang menyatakan bahwa pada gelanggang komutatif, setiap ideal maksimal maksimal adalah prima, dan lemma berikut ini membuktikan bahwa terdapat ideal prima tapi bukan ideal maksimal.

Lemma 2.2
Diberikan gelanggang $R = \mathbb{Z}[x]$ dan $P = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$.
Akan ditunjukkan bahwa P ideal prima tapi P bukan ideal maksimal.

Bukti :
$R = \mathbb{Z}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$
$P = \{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$

Ambil $q(x), s(x) \in R = \mathbb{Z}[x]$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$
$$= \sum_{m=0}^{k} b_m x^m \, , b_m \in \mathbb{Z} \, , k \in \mathbb{Z}^+$$
$$s(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_t x^t$$
$$= \sum_{t=0}^{l} c_t x^t \, , c_t \in \mathbb{Z} \, , l \in \mathbb{Z}^+$$

Misalkan $q(x)s(x) \in P$

$$q(x)s(x) = \sum_{i=0}^{k+l} \sum_{j=0}^{i} (b_j c_{i-j}) x^i$$
$$= \sum_{t=0}^{k+l} (b_0 c_0) x^0 \; + (b_0 c_1 + b_1 c_0) x^1$$
$$+ (b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0) x^2$$
$$+ (b_1 c_2 + b_2 c_1) x^3$$
$$+ b_2 c_2 x^4 + \cdots \cdots \in P$$

Karena $q(x)s(x) \in P$, maka $b_0 c_0 = 0$
Artinya $b_0 = 0$ atau $c_0 = 0$. Jika $b_0 = 0$, maka $q(x) \in P$. Jika $c_0 = 0$ maka $s(x) \in P$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa P ideal prima.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa P bukan ideal maksimal.
Diketahui bahwa P ideal. Akan ditunjukkan bahwa $P + 2\mathbb{Z}$ ideal dari $\mathbb{Z}$. Ambil $a \in \mathbb{Z}$ dan $b \in P + 2\mathbb{Z}$. Karena $b \in P + 2\mathbb{Z}$, maka b berbentuk $b = p + 2k$ dengan $p \in P$ dan $k \in \mathbb{Z}$. Maka $ab = a(p + 2k) \in P + 2\mathbb{Z}$ dan $ba = (p + 2k)a \in P + 2\mathbb{Z}$. Karena $ab = ba \in P + 2\mathbb{Z}$, maka $P + 2\mathbb{Z}$ ideal terhadap $\mathbb{Z}$.

$P = \{0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$
$P + 2\mathbb{Z} = \{a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n\}$, dimana $a_i \in 2\mathbb{Z}$.

Sebelumnya telah diketahui bahwa P ideal dan $P + 2\mathbb{Z}$ juga ideal. Untuk setiap $x \in P$ dan $x \in P + 2\mathbb{Z}$ terdapat $y \in P + 2\mathbb{Z}$ di mana $y \notin P$. Dalam hal ini terdapat $a_0 \in P + 2\mathbb{Z}$ tetapi $a_0 \notin P$. Sehingga $P \subsetneq P + 2\mathbb{Z}$ yang berarti $P \neq P + 2\mathbb{Z}$. Karena $P \neq P + 2\mathbb{Z}$ maka P bukan ideal maksimal.

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas disimpulkan beberapa hal berikut:

1. Jika $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ dan $I = (1+i)^2 R$. Maka I tidak ideal prima pada R.
2. Jika F lapangan dan I ideal terhadap $F[x]$, maka I prima jika dan hanya jika $I = \langle 0 \rangle$ atau $I = \langle f(x) \rangle$ untuk suatu $f(x)$ yang tak tereduksi.
3. Jika $M \neq R$ dan R gelanggang komutatif, maka M ideal maksimal jika dan hanya jika untuk setiap $r \in R - M$, terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $1_R - rx \in M$.
4. Jika $F[\![X]\!]$ adalah gelanggang dari *formal power series* dengan koefisiennya dalam lapangan F, maka $\langle X \rangle$ adalah ideal maksimal.
5. Jika F lapangan dan I ideal terhadap $F[x]$, maka $\langle f(x) \rangle \neq \langle 0 \rangle$ ideal maksimal terhadap $F[x]$ jika dan hanya jika $f(x)$ tak tereduksi atas F.
6. Jika R gelanggang komutatif dengan $R = \mathbb{Z}[x]$ dan $P = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$, maka$P$ ideal prima tapi P bukan ideal maksimal.

Daftar Pustaka

[1] Fraleigh, John. 1997. *A First Course In Abstract Algebra*, 5th Edition. University of Rhode Island

[2] Fraleigh, John. 2002. *A First Course in Abstract Algebra*, 7th Edition. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

[3] Judson.W, Thomas. 2011. *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University.

[4] Prihandoko.C, Antonius. 2009. *Pengantar Teori Ring dan Implementasinya.* Jember : Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas jember.